$U=0.5[y(t_o) + (-y(t_o))]=0$

Resultando que

$P_e=P(n> y(t_o))$

CASO C

Suponga que a la salida de un sistema binario excitado con $p_1(t)$ o $p_0(t)$ se tiene a la salida $p_{1o}(t)$ o $p_{0o}(t)$. La probabilidad de error se calcula como:

$$P_e = 0.5P(p_{0o}(t_0) + n > \text{Umbral}) + 0.5P(p_{1o}(t_0) + n < \text{Umbral})$$

$$\text{Umbral} = \frac{p_{0o}(t_0) + p_{1o}(t_0)}{2}$$

$$P_e = 0.5P(p_{0o}(t_0) + n > \frac{p_{0o}(t_0) + p_{1o}(t_0)}{2}) + 0.5P(p_{1o}(t_0) + n < \frac{p_{0o}(t_0) + p_{1o}(t_0)}{2})$$

$$P_e = 0.5P(n > \frac{p_{1o}(t_0) - p_{0o}(t_0)}{2}) + 0.5P(n < \frac{p_{0o}(t_0) - p_{1o}(t_0)}{2}) = P(n > \frac{p_{1o}(t_0) - p_{0o}(t_0)}{2})$$

Cuando entra $p(t)$ sale $y(t_0)$. Cuando sale $0.5(p_{1o}(t) - p_{0o}(t))$, es porque entra $0.5(p_1(t) - p_0(t))$.

Por lo tanto usaremos las mismas formulas pero donde aparezca $p(t)$ colocaremos $0.5(p_1(t) - p_0(t))$ y donde aparezca $P(f)$ colocaremos $0.5(P_1(f) - P_0(f))$

Asi:

$$H_R(f)\Big|_{optimo} = k\frac{[P_1(f) - P_0(f)]^* e^{-j\omega t_0}}{2G_n(f)}$$

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P_1(f) - P_0(f)|^2}{4G_n(f)}df$$

Para el caso de ruido blanco (Filtro adaptado) el filtro óptimo resultara:

$h_R(t)_{optimo}=k/\eta\ [p_1(t_0-t) - p_0(t_0-t)]$

Como $p_1(t)$ y $p_0(t)$ solo existen en un intervalo $(0, t_b)$ $h_R(t)_{optimo}$ también, pero la convolución de los pulsos con $h_R(t)_{optimo}$ tiene el doble de duración y es máxima en t_0.

En el caso de ruido blanco

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p_1(t) - p_0(t)|^2}{2\eta} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(t)^2}{2\eta} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t)^2}{2\eta} dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t)p_1(t)}{2\eta} dt$$

Definamos:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t)p_1(t)}{2\eta} dt$$

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t)^2 \, dt$$

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t)^2 \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(t)^2}{2\eta} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t)^2}{2\eta} dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0(t)p_1(t)}{2\eta} dt$$

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right|_{max} = \frac{1}{2\eta}\left(E_1 + E_0 - 2\lambda\sqrt{E_1 E_0}\right)$$

Si $E_1 = E_0 = E$

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right| = \frac{E}{\eta}(1 - \lambda)$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}(1 - \lambda)}\right)$$

Si en cambio $p_1(t)$ y $p_0(t)$ son ortogonales, el factor $\lambda = 0$, en cuyo caso:

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right| = \frac{E}{\eta}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right)$$

Si se trata de señales antípodas (λ=-1)

$$\left.\frac{y^2(t_0)}{\sigma^2}\right| = \frac{2E}{\eta}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right)$$

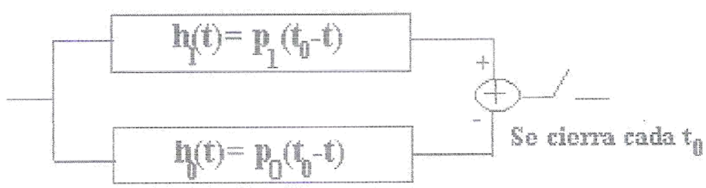
Se observa que en este ultimo caso se obtiene la menor probabilidad de error, de hecho si empleamos pulsos ortogonales necesitaremos enviar el doble de la potencia para lograr la misma probabilidad de error que usando señales antípodas.

REALIZACIONES PRACTICAS DEL FILTRO ADAPTADO

Como sabemos:

$h_R(t)_{optimo}$=k/η [$p_1(t_0\text{-}t)$ –$p_0(t_0\text{-}t)$]

Esto puede implementarse con dos filtros conectados como se muestra:



Matemáticamente:

$$y(t_b) = \int_0^t p_1(t_b - \tau)x(t_b - \tau)d\tau - \int_0^t p_0(t_b - \tau)x(t_b - \tau)d\tau$$

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) - h_0(t)) = \int_0^t h_1(\tau)x(t - \tau)d\tau - \int_0^t h_0(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

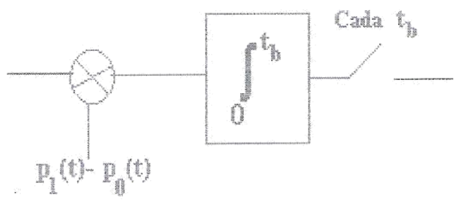
$$y(t) = \int_0^t h_1(t - \tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t h_0(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

Evaluemos en $t_0=t_b$ y coloquemos $h_k(t)=p_k\,(t_b\text{-}t)$

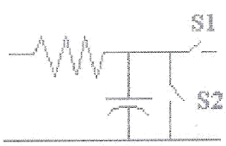
Hacemos el cambio de variable $t_b\text{-}\tau$=u

$$y(t_b) = \int_0^{t_b} p_1(u)x(u)d\tau - \int_0^{t_b} p_0(u)x(u)d\tau = \int_0^{t_b} (p_1(u) - p_0(u))x(u)d\tau$$

Esto se lograría con el siguiente sistema:



Observe que si $p_o(t)=0$ y $p_1(t)$=Constante=k entre o y t_b, la multiplicación no es necesaria y el receptor optimo queda simplificado a un integrador seguido de un interruptor. Un circuito sencillo que logra este objetivo es:



Se cierra momentaneamente el interruptor 1 y luego se cierra el interruptor 2 para descargar.

Calculemos el valor de $[y(t_0)^2/\sigma^2]$ máximo

$$y(t_b) = A(1 - e^{-t_b/RC})$$

$$y^2(t_b) = A^2(1 - e^{-2t_b/RC})$$

El ruido por su parte tiene una

$$G_{out}(f) = \frac{\eta}{2}|H_{RC}(f)|^2 = \frac{\eta}{2}\frac{1}{1+(f/B)^2}$$

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{out}(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2}\frac{1}{1+(f/B)^2}df = \frac{\eta}{2}\pi B$$

$$\frac{y^2(t_b)}{\sigma^2} = \frac{2A^2(1-e^{-2\pi Bt_b})^2}{\eta\pi B}$$